

# 國小學生數學知識結構認知診斷評量之研究\*

## Cognitively diagnostic assessment of mathematical knowledge structures of elementary school children

余民寧<sup>1</sup>      林曉芳<sup>2</sup>      蔡佳燕<sup>3</sup>

### 國立政治大學教育學系

Min-Ning Yu      Sheau-Fang Lin      Chia-Yen Tsai  
Department of Education  
National Chengchi University

聯絡地址：台北市木柵郵政 1-433 號信箱

電話：(02) 8661-0181

E-MAIL：[mnyu@nccu.edu.tw](mailto:mnyu@nccu.edu.tw)

---

\* 本文得以完成，作者要感謝國科會補助研究經費（NSC 88-2614-S-004 -001）。

1. 為國立政治大學教育學系教授。
2. 為國立政治大學教育學系博士班研究生。
3. 為國立政治大學教育學系碩士。

## 中文摘要

本研究使用「路徑蒐尋網路分析」為評量分析方法，利用其量尺化程序來分析學生的知識結構。以台北市 1024 名國小六年級學生為研究樣本，「數學科認知診斷成就測驗」為施測工具，研究證實一套認知診斷評量方法的可行性和價值性，以彰顯當今國小學生數學學習成就低落及數學科補救教學的重要性。

歸納結果的分析與討論，本研究可獲致下列幾點結論和涵義：

1. 數學科認知診斷成就測驗甲卷可作為篩選不同學力程度學生的工具之用。
2. 國小學生的數學程度普遍未達應有的學力水準。
3. 不同學力程度學生的知識結構不盡相同。
4. 學力程度愈高學生的知識結構愈接近所期望的學習結果。
5. 認知診斷評量可作為一種新式的教學評量方法。
6. 認知診斷評量隱含對補救教學的發展契機。
7. 認知診斷評量啟發網路表徵方法學的應用潛力。

未來，應用這套認知診斷評量方法來探索各種學科領域知識結構的研究，將如雨後春筍般的蓬勃發展，以圖形表徵方式來呈現潛藏的網路結構關係，可增加研究結果的說服性。

**關鍵詞：**知識結構、路徑蒐尋網路分析、認知診斷評量

## Abstract

This study is to explore the application of knowledge structure assessment on 1024 elementary school children's knowledge structures about mathematics. It concludes that the self-constructed diagnostic test in mathematics is a useful tool, most students' achievement is under-standard, and the cognitively diagnostic assessment is a potential method for educational evaluation. There are some implications for future applications and further research problems are discussed and proposed.

**Key words :** knowledge structures 、 pathfinder network analysis 、 cognitively diagnostic assessment

# 壹、緒論

在當前各級學校的學習課程中，數學科的學習一直是多數人的夢魘。尤其是數學低成就的人，常把自己學不好數學的原因歸咎於自己智能不足、缺乏學習的動機、課程太過深奧、老師的教法不好、考試題目太難、課程與生活脫節以致無法學以致用等各種內外因素，而不去深究真正學不好的原因所在。如同 Kirk, Gallagher, & Anastasiow (1993) 所歸納提出的，造成學業低成就的因素如圖 1 所示：

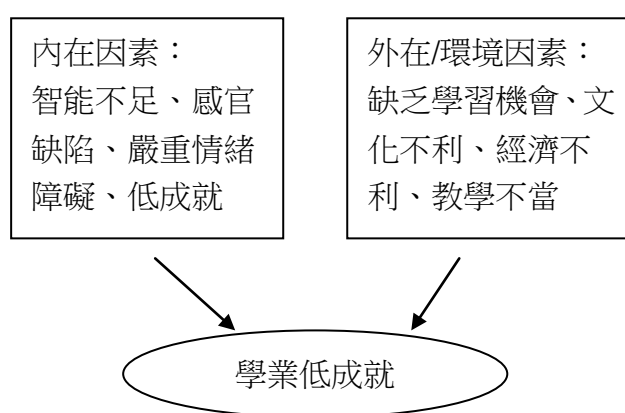


圖 1 學業低成就的原因

由此可見，這些低成就者可能真的是由於先天遺傳或後天因素造成生理缺陷而導致學習能力發生障礙，但也有可能是習得性的缺陷（learning deficits），也就是由於後天的外在因素：如情緒困擾、教學不當、學習不良、疾病等干擾，而導致學科能力不足或低下者。如果這種低成就的現象發生在數學科的學習上，便會造成所謂「數學低成就」（mathematics underachievement）的人（周台傑、蔡宗玫，民 86；Reid, Hresko, & Swanson, 1991）。

一般來說，所謂的低成就者（underachiever），多數學者持下列的看法：亦即指個人智力正常，但在學業成就上顯著地低於其智力水準所預期者（林世元，民 86；林秀錦，民 83；周台傑，民 81；曾玉玲，民 82）。基於此看法，本研究所擬指稱的數學低成就者，並不專指在數學學習上是「學習障礙」或「智能不足」

的學生而言，但也有可能包括「學習障礙」或「智能不足」的學生在內；而是，持比較廣義的看法，凡在基本心理過程呈現學習異常情形，而導致個人在數學學習方面的獲得與使用出現明顯困難者，便是所謂的數學低成就者。

然而，從學者專家的立場來看這些低成就者的表現，即可推知低成就的形成原因不光只是由單純一種因素所造成，且低成就也未必就是一種病症，它是可以藉由外在環境的改變或教學的補救措施，來幫助這些學習成就低落的學生和一般學生一樣正常的學習和表現。

因此，教育界可以著力的地方是針對這些低成就學生實施補救教學（remedial instruction）；亦即是，在教師診斷學生學習困難後，採行一連串對症下藥的積極性教學活動。而目前一般潛能開發班對數學低成就學生的輔導，多偏重於認知方面的知識性補救教學，強調教師的外在引導功能與著重學生的過度學習，而往往忽略了學生內在的學習歷程（洪榮照，民 79；秦麗花，民 84）。這些不足之處，正是吸引本研究擬進一步去探索內在學習歷程為何之理由。

影響學生數學學習成敗的因素很多。當學生在從事一項新學習任務時，其所帶入學習中的最重要事項就是概念，透過概念的學習與傳達，學生才能獲得新知識（余民寧，民 86a）。因此，概念學習在教育上的涵義即是，希望藉由將概念具體意義化，幫助學生能在概念的學習上有所瞭解，以促進學生能以抽象的方式使用具體概念。因此，認知心理學者認為，學習是一種概念改變的過程，是一種探索的歷程，一點也不為過。

在概念學習的歷程中，涉及許多認知的策略。在學習歷程中，學生必須是主動的參與者，學生根據情境中的訊息，提出自己的假設，並經過考驗、修正、證明後，才得到一套概念；因此，概念學習可視為是思考與解決問題的歷程。概

念的發展，除了數的概念之外，常被提到的數學概念、還有量的概念、時間的概念與空間的概念等等(劉弘白，民 79)。而這些概念的理解前提，必須是以語文概念的成熟發展為基礎，才有可能獲得良好的學習。沒有基本知識和概念，學生就只能機械式的使用符號和運算技巧，而無法解決真正的問題(楊坤堂，民 84)。根據學者的研究指出，閱讀能力與計算能力對解題表現均有顯著差異；語文能力及閱讀能力愈佳的學生，在解答數學題目時有較佳的表現(周台傑、蔡宗玫，民 86)。有意義的數學學習，即是指學生能從學習中獲得描述性知識和程序性知識而言(馮莉雅，民 86)。

雖然，諸多學者專家對數學如何解題的歷程看法不同，但這些不同看法可以歸納整理如表 1 的分類說明所示：

表 1 各學者專家對數學解題歷程的看法分類表

	第一階段	第二階段	第三階段	第四階段	第五階段	第六階段
Polya(1945)	瞭解問題	擬定計畫	執行計畫	回顧		
Kilpatrick (1967)	瞭解問題	擬定計畫	執行計畫	檢討		
Riley、Greeno & Heller(1983)	問題基模	策略知識	行動基模			
Kintsch & Greeno(1985)	知識結構	策略知識				
Schoenfeld (1985)	閱讀	分析	探索	計畫	執行	驗證
Mayer(1987)	問題轉譯	問題整合	計畫監控	解題執行		
吳德邦、吳順治 (民 78)	閱讀問題	探究問題	選擇策略	解決問題	驗算	

(資料引自：林曉芳(民 88)。數學低成就國中生在代數概念發展之評量研究(18 頁)。國立政治大學教育學系碩士論文。)

雖然，學者專家們對解題歷程的看法不盡相同，但解題歷程不僅需要語文知識的

配合，更涉及複雜的認知歷程的看法，卻是無庸置疑的。因此，不光僅僅是需要探索學生的解題歷程而已，更有深入探究問題表徵（**problem representation**）的必要（古明峰，民 87），而這項新研究有兩個基本假設前提，亦即是：

1.在解題時，雖然使用相同的數學運算，但隱藏在問題背後的描述可能是不同的概念網路詞；

2.概念網路是解題者正確建構內在表徵的重要知識，學生在解題時將深受問題語意知識的影響。

據此，研究者相信若從知識表徵（**knowledge representation**）的觀點來進行解題歷程的研究，將可針對低成就者內在問題解決發生錯誤或缺陷之處，有進一步的瞭解。這也是本研究的動機之一。

由於，解題歷程包含整個解題期間所有廣闊且複雜的心理活動範圍（李盛祖，民 86）。故，在解題的過程中，因個人對問題的處理方式不同，便產生出不同的解題歷程，造就出解答問題的專家與生手（**experts and novices**）。所謂專家，是指一個人對某個特定領域具有高技巧或高知識；而生手則是指一個人在某個特定領域中表現低水準的技巧或知識。過去，已有諸多文獻（林清山，民 86；Hegarty, Mayer, & Monk, 1995；Mayer, 1987）指出，專家與生手在問題解決歷程的問題呈現上、問題解決效能上、監控問題解決上、領域特定性上等方面，均表現出明顯的差異；在上述各方面，專家的表現均顯著優於生手的表現。

數學問題的解題歷程是一種程序性知識的運用，是以一種稱為「生產法則」（**production rules**）來產生有目的性的活動或行為方式所表徵出的知識（岳修平，民 87）。而這種知識表徵方式，正是認知心理學所擬探討的認知結構（**cognitive structure**）；所謂的認知結構，是指長期記憶中概念間的關係與組織，有助於個人進行儲存、提取和操弄等訊息的處理歷程。關於認知結構有許多相類似的名詞，如：知識的心理表徵（**mental representation of knowledge**）、知識表徵（**knowledge**

representation)、知識結構 (knowledge structure) (江淑卿, 民 86) 等等, 其意義都與個體內在的心理運作有關, 都是在闡述個體對於知識結構的處理歷程。若從認知心理學的觀點來看, 訊息處理模式 (information processing model) 所強調的「表徵」(representation) 意義, 除了將它視為認知活動的產物外, 也將它認為是一種以概念代替實物的歷程 (張春興, 民 85); 換言之, 「知識表徵」乃是個體經過認知活動後的產物, 在心理活動過程中所產生的各種內在心象 (余民寧, 民 86a)。

經過文獻評閱, 研究者認為 Solso (1998) 所提出的數種知識表徵模式中, 以「網路模式」(network model) 最具應用價值, 因其理論模式隱含相當重大的教育涵義。「網路模式理論」提倡, 在人類的記憶系統中, 知識是由各個獨立單位所連結形成的網路型態而儲存於記憶中, 知識結構乃是由許多代表基本概念的節點 (node), 以及節點與節點之間以某種語意網路的連結方式而組成, 並非以許多單一節點單獨存在或湊在一起來共同表徵的。藉由這個複雜的「關係網路」(network of relationship) 連結在一起的方式, 可以使得我們能夠達到學習與記憶的目的; 而其中的節點, 即是網路結構中最簡單的形式, 它是用來表徵概念的單位。

研究者 (民 86a) 認為, 人類的長期記憶系統相當於一個複雜的網路結構 (network), 其中包含三個重要的特徵:

1. 關係結構: 即以明確的關係型態來連結各個節點。
2. 階層特徵: 即某個節點可以用來代表一組節點。
3. 內隱訊息: 即各節點間的不同連結關係, 隱含著相異的結構涵義。

因此, 單獨一個概念的意義, 是由與其餘概念間的一組關係所構成; 所以, 相似的概念間會具有一組共同的特性。在網路結構中, 一般常見之概念共同關係有:

- (1) 超集合, 如: 花可能是玫瑰;
- (2) 子集合, 如: 玫瑰是植物的一部份;
- (3)

屬性，如：香味是玫瑰的一種屬性；(4) 部份，如：花是植物的一部份；(5) 相似性，如：一匹駿馬相似於一匹小馬；(6) 近似性，如：花是種在苗圃中；(7) 前後連貫性（功能性的），如：氣體溫度的改變導致體積的改變；(8) 操作性，如：力等於質量加上速度。

類似的看法，也有邱守榕（民 81）認為在數學的學習過程中，有一種常用的表徵基模稱之為「語意網路」，語意網路是表徵語意記憶的表徵模型，在這個語意網路中包含許多概念，而這些概念亦透過語意網路的連結，形成一個相互關連的網狀脈絡，此網路圖可表現出學習者如何將概念性知識化為自己的長期記憶。Davis, Shrobe, & Szolovits（1993）亦認為知識表徵是人類內在思考推理活動歷程的一個代用品（surrogate），並且也是人類表達自己和與他人溝通的媒介。

在數學代數的學習中，最具主導性的知識就是語意性知識，當學生在建構語意網路發生障礙時，則在數學問題的解決上亦會發生障礙。專家與生手間的語意網路原本就是有差異的，因而才會導致其在問題解決策略上的使用也有差異。因此，在生手變成專家的過程中，即是一連串概念結構聯結、更新與重組的過程（余民寧，民 86a）。

然而，在學習過程中，我們多半無法直接獲知大腦的運思過程或變化情形，頂多僅能透過教學評量來間接推測之。但是，當今各級學校仍然盛行紙筆式的「總結性評量」（summative evaluation），它是以一種加總方式（summation）來評定學生的學習成就，它的限制不僅是只能獲得一個訊息不夠充分的總分資料而已，最大的缺失則在無法獲取學習過程中學生如何組織他所了解的概念及概念間的關係結構等訊息。因此，一但教師發現某位學生跟不上其他同學的程度時，即使要進行補救教學，根本也不知道要從何處著手補救起，這不僅是導致補救教學實施困難，其實成效也相當有限。



幸好，近年來在認知診斷評量(cognitively diagnostic assessment) (Jonassen, Beissner, & Yacci, 1993; Nichols, 1994; Nichols, Chipman, & Brennan, 1995) 領域中，有些圖形評量技術的誕生與改進，試圖將學生所習得的概念與既有的認知結構以圖形方式表徵出來，以進一步確認學習過程中的概念變化、概念錯誤的發生、和謀求補救改善之道為何。在這些做法中，研究者過去所領導從事的概念構圖(concept mapping) 研究，已有初步的具體成果與驗證成效的報告出來(余民寧，民 86a; 余民寧、陳嘉成，民 85a, 民 85b; 余民寧、陳嘉成，民 87; 余民寧、陳嘉成、潘雅芳，民 85; 余民寧、潘雅芳、林偉文，民 85; 陳嘉成，民 85; 陳嘉成、余民寧，民 87)。後續值得再做的事，即是應用評分更客觀的工具和方法，來改進初步研究成效不足之處，以使認知診斷評量領域的學術發展更臻成熟與穩健。

因此，研究者擬賡續前者的研究，繼續探索可行且簡易的評量方法，以企圖幫助學習低成就學生解決他們在學習上的問題。於是，透過持續的文獻評閱過程，終於找到另一種類似概念構圖法的網路式概念圖分析技術：「路徑蒐尋網路分析」(pathfinder network analysis) (Schvaneveldt, 1990a)。它是由一組概念，以節點(node)和鍊結(links)相互連接方式來呈現的網路結構分析技術；它使用一種客觀的統計演算法則(即路徑蒐尋量尺化算則(pathfinder scaling algorithm))來計算節點與節點間的關係和位置，以節點代表概念、鍊結代表兩兩概念間的聯結關係，由於鍊結有鍊值(weight 或 value)但沒有命名，僅能以特定的強度或鍊值來表示語意上概念關聯的程度，同時鍊值也能用來預測學習表現；鍊結包括間接鍊(edge)(或對稱鍊)和直接鍊(arc)(或非對稱鍊)，其中以長度最短的間接鍊為主，鍊結的特色就是用來表徵知識結構中概念與概念之間的關係，並藉此瞭解哪些鍊結間的關係較重要，但由於鍊結沒有命名，所以在閱讀圖解時，較難直接瞭解其網路結構型式(Schvaneveldt, 1990b)。

路徑蒐尋網路分析主要是以統計學上的圖解理論（graph theory）為基礎，以數學形式來作科學與心理現象表徵的一種方法。路徑蒐尋網路分析用來測量知識結構的過程，大致可分為三個步驟：（一）知識結構的引發；（二）知識結構的構成；（三）知識結構的評價。茲分別說明及敘述適用的軟體程式如下：

#### （一）知識結構的引發

首先，挑選欲進行研究的一群概念，兩兩成對，拿給受試者進行判斷各配對概念間的相似性、關聯性、或心理距離值，如此可獲得一個對稱性的近似值矩陣（proximity matrix，簡稱 PRX），作為資料分析的輸入值，它在概念上可定義為完全網路（complete network），亦可稱為資料網路（DATANET）。理論上，當網路上有  $n$  個節點，且每個節點間都有連結時，則會產生  $(n(n-1))/2$  個鍊結。

#### （二）知識結構的構成

在路徑蒐尋之完全網路中，將以最短長度的徑路（minimum-length path）作為兩節點間之距離（Dearholt & Schvaneveldt, 1990；Schvaneveldt, 1990b）。茲舉例說明近似值轉換為路徑蒐尋網路的情形，如圖 2 所示。

近似值 (Proximity Data)

	A	B	C	D	E
A	0	1	3	2	3
B	1	0	1	4	6
C	3	1	0	5	5
D	2	4	5	0	4
E	3	6	5	4	0

路徑蒐尋網路

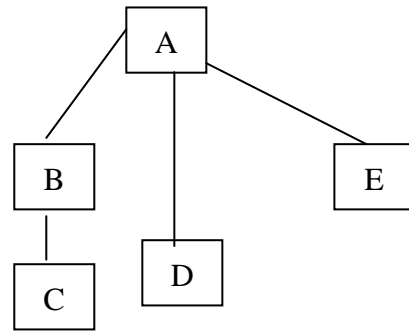


圖 2 假想的近似值及其轉換後的路徑蒐尋網路

(資料引自：Goldsmith, Johnson, & Acton, 1991)

上述資料轉換的邏輯，即是當間接鍊的近似值小於直接鍊的近似值時，則保留非直接鍊，並淘汰直接鍊，如：A 至 B 至 C 之間的近似值，小於 A 至 C 的近似值，故保留 A 至 B 至 C 的間接鍊，而淘汰 A 至 C 的直接鍊。其次，當直接鍊的近似值小於間接鍊的近似值時，即可取代間接鍊，如：由 A 至 B 至 C 至 D、由 A 至 B 至 D 或由 A 至 E 至 D 的近似值都大於 A 至 D 的近似值，故增加 A 至 D 的直接鍊，而淘汰其他的間接鍊，同樣的，增加 A 至 E 之直接鍊的道理亦同。

圖解理論距離 (graph-theoretic distance, 簡稱 GTD)，係指最小鍊結數或最短的路徑蒐尋網路中的節點距離，亦即是透過算則將路徑蒐尋網路的鍊值，轉換為圖解理論距離，並且以距離向量呈現。Knoebel, Dearholt, & Schvaneveldt (1988) 曾對「路徑蒐尋網路」和「圖解理論距離」何者為最適合 (fit) 真實的表徵提出說明：路徑蒐尋網路重視鍊值，能掌握概念之間的相近性特質；而圖解理論距離則重視概念的結構特質，能掌握概念的空間型態；換句話說，二者皆有其特色。

### (三) 知識結構的評價

透過路徑蒐尋網路分析，可以獲得圖解理論距離、路徑蒐尋網路、近似值等

資料，然後進一步和參照結構（referent structure）相比較，以便計算下列三種相似性指數：GTD 指數、PFC 指數和 PRX 指數（江淑卿，民 86；林曉芳，民 88；蔡佳燕，民 89；Goldsmith & Davenport, 1990；Gonzalvo, Canas, & Bajo, 1994）。在參照結構方面，Acton, Johnson, & Goldsmith（1994）發現採用專家的團體參照結構效果最佳。茲舉例說明這三種相似性指數的意義和計算過程：

(1) GTD 指數（圖解理論距離指數；graph-theoretic distance index）

GTD 指數係指根據圖解理論的算則，計算兩個路徑蒐尋網路中圖解理論距離的關聯性，並以相關係數表示兩個網路之間的相似程度。

GTD 指數的計算，係以兩個網路中相同之節點間距離值的相關係數來表示，它可以用來代表兩個網路間相似程度的一種指標。GTD 指數的值域範圍由 0（表示完全不同的網路）到 1（表示完全相同的網路）；當 GTD 指數的數值愈小時，即表示受試者與參照結構間的網路愈不相似；而當 GTD 指數愈大時，即表示受試者和參照結構間的網路愈相似。例如：

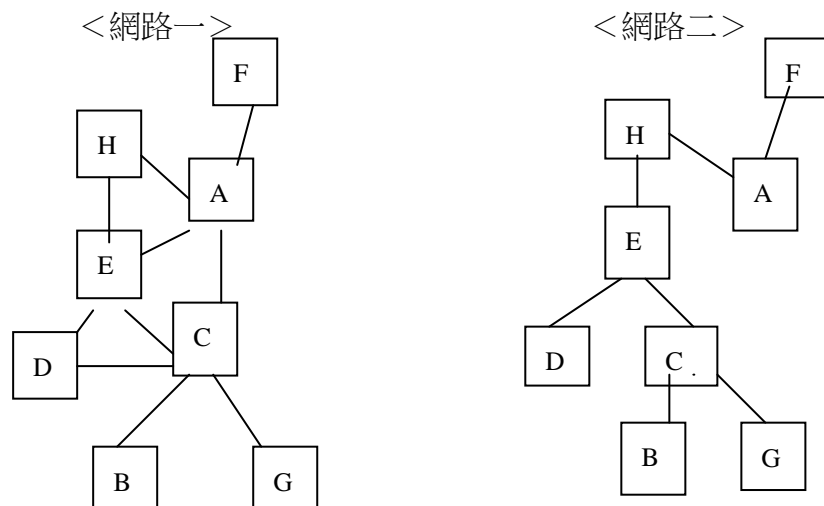


圖 3 GTD 指數的網路圖解（資料引自：Gomez & Housner, 1992）

表 2 網路一和網路二中部份 GTD 指數之距離值的計算

網路 1 的距離	網路 2 的距離
----------	----------

A-C	1	3
A-D	2	3
A-G	2	4

(2) PFC 或 C 指數 (相近性指數; closeness index)

PFC 指數係指根據集合理論 (set-theory) 方法, 計算兩個網路所共有的節點組 (set of nodes) 中, 其鄰近節點的交集與聯集之平均比率; 它亦可用來作為表示兩個網路間相似程度的一種指標。PFC 指數的值域範圍由 0 到 1; 當 PFC 指數值愈小時, 即表示受試者和參照結構間的網路愈不相似; 反之, PFC 指數值愈大時, 即表示受試者和參照結構間的網路愈相似。

茲舉例說明並比較 GTD 指數與 PFC 指數間的差異:

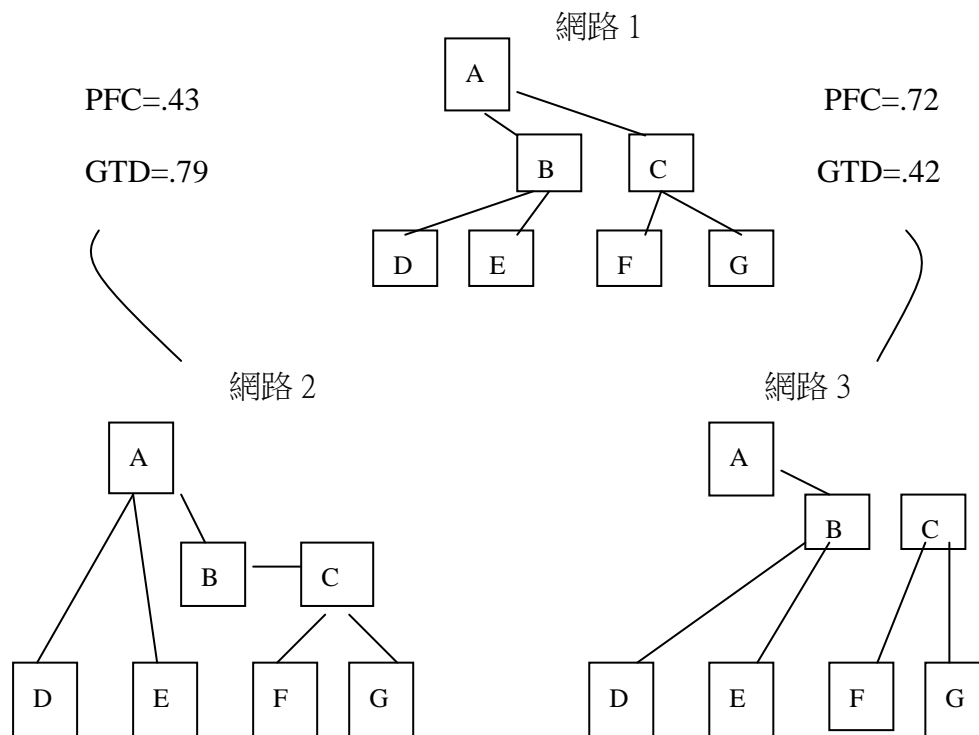


圖 4 網路 1 和另兩個網路間的 GTD 指數與 PFC 指數

(資料引自: Goldsmith, Johnson, & Acton, 1991)

由 PFC 指數判斷, 則網路 1 和網路 3 間的相似程度, 比網路 1 和網路 2 間

的相似程度更為接近（即較相近）；但由 GTD 指數判斷，則網路 1 和網路 2 間的相似程度，比網路 1 和網路 3 間的相似程度更為接近（即較相似）。

表 3 根據圖 3 之網路 1 與網路 2 計算所得之 PFC 指數

共有節點	鄰近節點		節點交集		節點聯集		比率
	網路 1	網路 2	集合	大小	集合	大小	
A	{B,C}	{B,D,E}	{B}	1	{B,C,D,E}	4	1/4
B	{A,D,E}	{A,C}	{A}	1	{A,C,D,E}	4	1/4
C	{A,F,G}	{B,F,G}	{F,G}	2	{A,B,F,G}	4	2/4
D	{B}	{A}	U	0	{A,B}	2	0/2
E	{B}	{A}	U	0	{A,B}	2	0/2
F	{C}	{B}	{C}	1	{C}	1	1/1
G	{C}	{B}	{C}	1	{C}	1	1/1

\*比率總和為 3，C 值為  $3/7=0.43$ ，U 表示空集合。

（資料引自：Goldsmith, Johnson, & Acton, 1991）

表 4 由圖 3 計算所得之 GTD 指數

節點	節 點						
	A	B	C	D	E	F	G
網路 1							
A	-	1	1	2	2	2	2
B		-	2	1	1	3	3
C			-	3	3	1	1
D				-	2	4	4
E					-	4	4
F						-	2
G							-

網路 2

A - 1 2 1 1 3 3

B

-

1

2

2

2

2

C

-  
3  
3  
1  
1

D

-  
2  
4  
4

E

-  
4  
4

F

-  
2

G

(資料引自：Goldsmith, Johnson, & Acton, 1991)

### (3) PRX 指數 (近似性指數；proximity index)

PRX 指數係計算兩個網路近似值矩陣間的關聯性，以相關係數表示兩個網路間的相似程度。PRX 指數的值域範圍，亦由 0 到 1；當 PRX 指數愈小時，即表示受試者和參照結構間的網路愈不相似；反之，當 PRX 指數愈大時，即表示受試者和參照結構間的網路愈相似。

在路徑蒐尋網路的研究中，經常使用 GTD、PRX、PFC 三種相似性指數來預測學習表現的效果，Gonzalvo, Canas, & Bajo (1994)發現三種指數都有不錯的預測效果，但 Goldsmith, Johnson, & Acton (1991) 的研究指出，PFC 指數的預測效果最佳，其次是 GTD 指數，PRX 指數的預測效果較差。這可能是 PRX 屬於完全模式，較不容易精確的掌握鍊結之重要訊息所致 (江淑卿，民 86)。

### (四) 知識網路組織工具

路徑蒐尋網路分析及路徑蒐尋網路量尺化算則等技術，係由美國新墨西哥州立大學 R. W. Schvaneveldt 教授所領導的團隊所開發出來的，這份研發出來的軟體程式，主要用來建構、分析、和評量路徑蒐尋網路之用，稱之為「知識網路組織工具」(knowledge network organizing tool, 簡稱為 KNOT) (Schvaneveldt, 1994)。

KNOT 在建構、分析、和測量知識結構的重大步驟程序，可以簡述如下 (江淑卿，民 86；Schvaneveldt, 1990b)：

(1) 評定概念配對的近似值：首先，確定一群欲被評量的概念，並以兩兩配對方式隨機呈現給受試者進行相似性、關聯性、或接近性的判斷，由此可獲得一個近似值資料檔，亦即是近似值矩陣 (PRX)。在撰寫可執行程式時，可視建檔的 PRX 值的內涵，選擇設定欲分析的資料性質為 similarities 值 (表示得分愈高，距離愈近) 或為 dissimilarities 值 (表示得分愈高，距離愈遠)。

(2) 結合分析各近似值資料檔：根據研究的需要，在分析團體資料時，可用 AVE 執行檔，結合分析不同個人的近似值資料檔。

(3) 計算路徑蒐尋網路：設定 r 和 q 參數值，將近似值矩陣轉換為 PFNETs。

(4) 計算圖解距離 (即計算 GTD 指數值)。

(5) 計算節點距離。

(6) 計算 C 或 PFC 指數。



(7) 計算相關 (Correlation)：若計算兩個近似值矩陣的相關，且其中一個是參照結構者，則此相關係數即為 PRX 指數；若計算兩個圖解距離的相關，且其中一個是參照結構者，則此相關係數即為 GTD 指數。

(8) 呈現路徑蒐尋網路圖解。

路徑蒐尋網路分析開始多應用於實驗室研究，近年來逐漸運用於教育心理學及認知心理學領域，其重點在於對知識結構作測量，利用量尺化程序分析專家的知識結構，建立專家系統，並試圖將所測得的知識結構運用於教學上，以幫助生手獲得專家的知識結構或學習專家的策略（江淑卿，民 86；江淑卿、郭生玉，民 86；林世華、宋德忠、陳淑芬、張國恩，民 87；林曉芳，民 88；蔡佳燕，民 89；Goldsmith, Johnson, & Acton, 1994；Johnson, Goldsmith, & Teague, 1994；Schvaneveldt, Dearholt, & Durso, 1988；Schvaneveldt, Durso, Goldsmith, Breen, Cooke, Tucker, & Maio, 1985）：

因此，綜合上述，本研究企圖從知識表徵的觀點，擬使用路徑蒐尋網路分析策略，來探討下列研究目的與問題：

1. 自編國小數學科認知診斷成就測驗所擬測量的知識結構為何？
2. 當前國小六年級學生的數學學力程度為何？
3. 比較不同學力程度學生的數學科知識結構之差異情形？
4. 探索認知診斷評量方法的可行性？

## 貳、研究方法

### 一、研究樣本

本研究以台北市 12 個行政區為抽樣範圍，自每個行政區中以隨機抽樣方式抽取公立國民小學三所，再以隨機抽樣方式自所抽取的學校中抽取一班六年級學生為樣本，共計抽取三十六班 1024 名學生為本研究的有效樣本。

根據抽樣結果，所抽取樣本的基本統計資料如表 5 所示。

表 5 本研究樣本的人數分配統計表

行政區□校名□班級□人數□松山區□松山國小□6 年 1 班□25□松山區□民族國小□6 年 1 班□26□松山區□民生國小□6 年 7 班□30□信義區□興雅國小□6 年 5 班□26□信義區□永吉國小□6 年 2 班□29□大安區□建安國小□6 年 10 班□34□大安區□金華國小□6 年 3 班□34□大安區□古亭國小□6 年 6 班□27□中山區□長安國小□6 年 2 班□24□中山區□大直國小□6 年 1 班□32□中山區□五常國小□6 年 1 班□28□中正區□螢橋國小□6 年 4 班□28□中正區□河堤國小□6 年 1 班□30□中正區□南門國小□6 年丙班□27□大同區□太平國小□6 年 6 班□27□大同區□明倫國小□6 年 2 班□23□大同

區延平國小 6 年 1 班 30 萬華區華江國小 6 年 2 班 31 萬華區龍山國小 6 年 4 班 24 萬華區東園國小 6 年 4 班 29 萬華區福星國小 6 年乙班 27 文山區木柵國小 6 年 3 班 32 文山區景美國小 6 年 3 班 23 文山區景興國小 6 年 1 班 27 南港區玉成國小 不公布 27 南港區南港國小 6 年 9 班 28 南港區成德國小 6 年 6 班 28 內湖區內湖國小 6 年 6 班 30 內湖區西湖國小 6 年 7 班 25 內湖區新湖國小 6 年 7 班 29 士林區士林國小 6 年 10 班 32 士林區劍潭國小 6 年乙班 28 士林區士東國小 6 年 1 班 31 北投區石牌國小 6 年 1 班 29 北投區關渡國小 6 年 7 班 29 北投區明德國小 6 年 5 班 25 合計 36 所學校，共 1024 名學生

## 二、研究工具

本研究工具的編擬目的，係用來區別或診斷國小六年級（含）以下學生在數學科學習上所達成之不同學力程度的成就差異為目的，所編製而成的「數學科認知診斷成就測驗」。基本上，任何一位正常學習的六年級小學生，在本測驗上的大多數題目應該都會答對，除了學力不足及有學習障礙者外；本測驗若給六年級以下的學生施測，則本測驗可用作診斷受試學生具有何種學力程度的評量工具。

本研究係根據成就測驗編製原理（余民寧，民 86b）及數學教育的相關研究文獻，聘請二所國民小學（政大實小及萬興國小）擔任三至六年級數學科教學的資深教師各一名（共計八名），根據現行小學數學科三至六年級課程範圍進行命題；命題時係考量：「凡學過該階段數學課程中，絕大多數小學生都學過、會作答、且答對的基本學力程度的關鍵題目為出題重點，並且按照命題的雙向細目表規劃，兼顧從知識到評鑑層次認知目標的試題，避免命出過於艱深、刁難、或太過於簡單容易的試題」為原則。每位教師各命題 30 題選擇題，經彙整後，各得三至六年級適用試題各 60 題；再根據三至六年級的課程教學內容範圍，由研究者自各年級試題中各挑選 10 題試題組合成一份試卷，共計合併組成甲、乙、丙三份內容相同的複本測驗（parallel tests），每份測驗各有 40 題單選的選擇題試題，內容範圍均包括三至六年級的數學課程。

本研究僅挑選上述甲卷測驗作為研究工具，拿給前述所抽取的 1024 名樣本施測，並以丙卷測驗作為驗證複本信度之用，及以該批受試學生上學期數學科平均成績為效標，進行試題分析。經內部一致性信度分析結果顯示，本數學科認知診斷成就測驗甲卷的試題難度介於 .23 ~ .98 之間（平均難度為 .73）、鑑別度介於 .21 ~ .54 之間（平均鑑別度為 .38）、 $\alpha$  信度係數為 .8423、複本信度為 .8365、效標關聯效度為 .7360，可見本數學科認知診斷成就測驗甲卷是一份信、效度兼具的優良數學成就測驗，適用於診斷與評量小學六年級（含）以下學生的數學科學力程度。本研究即以此測驗甲卷（參見附錄一），作為評量與比較六年級不同學力程度學生的數學科知識結構差異情形的工具。

### 三、研究程序

本研究目的，旨在發展一套評量不同學力程度學生知識結構的認知診斷測驗工具和評量模式，係透過學生在數學科認知診斷成就測驗甲卷上的成就評量結果，利用電腦程式（KNOT）進行量化分析，以期獲得不同學力程度學生群與標準答案之數學概念知識結構圖，再進一步比較這些不同學力程度學生群的學習表現情況，以用來診斷與區別學生在數學概念學習成就的分類結果。

本研究使用量化分析方式來進行相關研究，其主要程序可以簡述如下：

發展工具：如前述步驟，發展出本研究用的測驗工具。

2.資料蒐集與分析：針對前述抽樣步驟及抽出受試學生樣本，並安排時段分批接受本測驗工具的施測，之後，將受試學生的作答資料進行集群分析和區別分析，以找出不同學力程度組別的學生群。

3.路徑蒐尋網路分析：再分別針對上述不同學力程度學生群的作答資料，經過資料轉換與處理的步驟（請參見下一節的程序敘述），利用 KNOT 電腦程式進行路徑蒐尋網路分析，繪製出這些不同學力程度學生群的知識結構圖，並計算出 PRX 指數、GTD 指數、和 PFC 指數（江淑卿，民 86；江淑卿、郭生玉，民 86；Dearholt & Schvaneveldt, 1990; Schvaneveldt, 1990a, 1990b）。

4.統計分析：比較不同學力程度學生群間的知識結構圖差異、在上述三種指數間的差異、以及與參照結構（referent structure）間上述三種指標的相似性差異。

### 四、資料分析與處理

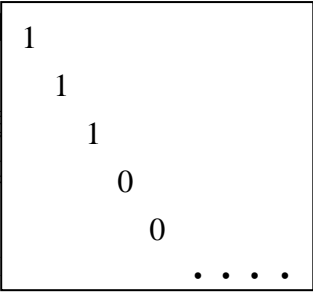
有鑑於傳統上路徑蒐尋網路量尺化算則的資料分析方法，都是以受試者判斷兩兩配對概念間的近似值資料（proximity data）作為輸入電腦程式 KNOT 分析的對象，這種算則不適用於本研究的成就測驗資料的分析。因此，本研究擬說明本案資料轉換、運算、及分析的程序於後，以便讀者明瞭本案的整個資料分析過程。

首先，在測驗編製過程中，即要求命題者同時針對所編擬試題進行概念分析，即提出該試題預期是在測量什麼概念的說明。經過選題過程的篩選，將測量類似或相近的概念試題歸在一類，最後彙編成甲、乙、丙卷三份測驗。就本研究所挑選的甲卷測驗而言，每個試題所擬測量的概念內容及概念所代表的涵義，可以參見附錄二的說明。這個內容資料可以  $K \times P$ （在本例中即為 40 試題  $\times$  20 概念）的試題概念矩陣來表示，並命名為 **A** 矩陣；其中，該矩陣中的元素只有兩種：1 即代表某試題有測量到某個概念，0 則表示某試題沒有測量到某個概念。**A** 矩陣的內容，可以參見附錄三的試題概念分析表說明。

其次，將所有受試學生在數學科認知診斷成就測驗甲卷上的原始作答資料，經電腦閱卷後，轉換成一個二元化的分數矩陣，並取名為 **B** 矩陣，則該矩陣中的元素也只有兩種：1 即代表某學生答對某試題，0 則表示某學生答錯某試題；所以，

B 矩陣是一個 N x K (在本例中即 40 學生 x 40 題) 的二元化資料矩陣。

第三，接著，將上述 B 矩陣中每個學生在 K 道試題上的作答情形依序為『1 1 1 0 0 .....』，「1」表示該題答對，「0」表示該題答錯，則將學生的反應組型向量轉換化為一個對角線矩陣的作法，即如下圖所示：



$$[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ \dots] \rightarrow$$

□

$$C =$$

40 x 40

第四，再將上述的 C 矩陣 (即 K x K 矩陣) 與 A 矩陣 (即 K x P 矩陣) 相乘，即可獲得另一 D 矩陣，代表個別學生的試題概念矩陣。該 D 矩陣中的元素所代表的涵義：「1」即表示某學生在數學科認知診斷成就測驗甲卷上具有答對該試題所欲測量之概念，「0」則表示某學生在數學科認知診斷成就測驗甲卷上不具有答對該試題所欲測量之概念；此矩陣即表示某學生在該份測驗上所測得 (或所具有) 的試題概念總數。如下列公式所示：

$$D_{K \times P} = C_{K \times K} \cdot A_{K \times P}$$

第五，由於上述 D 矩陣的全部元素皆屬名義變項 (nominal variable) 或虛擬變項 (dummy variable) 資料，故，兩兩概念間的近似值可以配合係數 (matching coefficient) 來衡量；配合係數值愈高，即表示所配對的概念較為相似，反之，則否。配合係數的算法，可以下列公式表示：

$$S_{ij} = (a + b) / m$$

其中，a 為 I、J 兩個事件共同具有的屬性數目，b 為 I、J 兩個事件共同不具有的屬性數目，m 則為屬性的總數。例如：假設有 I、J 兩個事件，其屬性如下表所示 (1 代表具有該屬性，0 代表不具有該屬性)：

屬性 □ 事件 I □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7 □ 1 □ 1 □ 1 □ 0 □ 1 □ 0 □ 0 □ 0 □ J □ 0 □ 0 □ 0 □ 1 □ 1 □ 0 □ 1 □ 則計算 I、J 兩個事件間的配合係數即為：

$$S_{ij} = (1 + 2) / 7 = 3/7 = .4286$$

依此類推，可以計算出 D 矩陣中兩兩概念間的配合係數值，並將它表示成一個對稱的方陣 E，它是一個 P x P 的方陣 (在本例中即為 20 概念 x 20 概念)；E 矩陣中的元素值，即為兩兩概念間的配合係數值，它可以用來表示配對概念間的相似程度，並且整個矩陣亦作為輸入電腦程式 KNOT 分析的近似值資料 (proximity

data) 矩陣。

過去，對數學教育的研究大多是採用「教育指標」(謝豐瑞，民 84；顏啟麟、羅昭強，民 84) 的方式，來測量並瞭解學生的學習情形，但近年來，由於概念構圖的理論漸漸受到重視，也開始有不少學者朝概念構圖的方向，逐步去研究學生學習時的知識結構變化情形。但初期的概念構圖應用研究，多半偏重於「階層式的概念構圖」，以主觀、經驗、理論的方式來建構概念圖；而現在，本研究擬用「路徑蒐尋網路式的概念構圖」模式，以統計和客觀的方式來建構概念圖或知識結構圖，並以網路圖解方式呈現不同學力程度學生群的知識結構。

因此，本研究欲將上述 E 矩陣輸入 KNOT 電腦程式，進行路徑蒐尋網路分析 (Pathfinder networks analysis)，計算出諸相似性指數 (GTD 指數、PFC 指數或 C 指數、PRX 指數等)，並繪製不同學力程度學生群在數學科認知診斷成就測驗甲卷的知識結構圖，並藉由知識結構圖的呈現，研究者可以進行比對並找出低成就學生與正常程度學生在學習過程中知識表徵的差異情形；這種作法除了可以當成是一般學習評量結果外，更可以找出學習進步與否及學習缺陷之處，以作為進一步採行補救教學的參考依據。

## 參、結果與討論

本節旨在呈現研究結果，並針對研究結果作分析與討論。茲分述討論如下：

### 一、認知診斷測驗標準答案的知識結構圖

首先，根據前節研究程序的說明，本研究自編研究工具「數學科認知診斷成就測驗甲卷」(參見附錄一)的試題難度介於 .23 ~ .98 之間(平均難度為 .73)、鑑別度介於 .21 ~ .54 之間(平均鑑別度為 .38)、 $\alpha$  內部一致性信度係數為 .8423、與丙卷間的複本信度為 .8365、與上學期的數學科平均成績間的效標關聯效度為 .7360，可見它是一份具有信度、效度的優良數學成就測驗，適用於診斷與評量國小六年級(含)以下學生的數學科學力程度。

至於「數學科認知診斷成就測驗甲卷」到底測量到什麼樣的知識結構呢？依據前述資料轉換的步驟，KNOT 程式可以幫助我們繪製出「數學科認知診斷成就測驗甲卷」本身所具有的標準答案之知識結構圖，如圖 5 所示，這個圖即表示當該測驗的所有試題都被答對時所繪製的知識結構網路圖，它除了顯示該測驗所欲測量到概念與概念間的連結關係外，亦將作為與不同學力程度學生群進行知識結構比較的參照結構之用。

圖 5 「數學科認知診斷成就測驗甲卷」標準答案的知識結構圖

## 二、不同學力程度學生群的知識結構圖

其次，將本研究自編工具「數學科認知診斷成就測驗甲卷」拿給受試學生作答後，經由集群分析（cluster analysis）結果顯示，該批受試學生共計可以分成四群。由於「數學科認知診斷成就測驗甲卷」的試題範圍包括三至六年級都有，且受試者皆是六年級學生，因此，根據本測驗所得及進行集群分析之後的結果，這四群學生可以分別取名為：第一群為「五年級學力程度」、第二群為「六年級學力程度」、第三群為「四年級學力程度」、和第四群為「三年級學力程度」學生群。這四群學生的分類人數及得分組距，如表 6 所示。

表 6 集群分析結果

□人數□組距 / 中位數（分）□命名□第一群□218□20-33 / 28□五年級學力程度□

第二群□516□26-40 / 34□六年級學力程度□第三群□233□21-25 / 23□四年級學力程度□第四群□57□6-23 / 17□三年級學力程度□

為了驗證上述分類的正確性，茲將被分類過的受試學生假設成已知其組別屬性，再進行一次區別分析(discriminant analysis)，除了找到三條區別函數(discriminant function)外，並獲得下列正確分類百分比值(hit ratio)，如表 7 所示。由表 7 所示可知，正確分類百分比值為 .8506，表示分類結果已達可接受的範圍(即  $\geq .80$  以上)，可據以接受區別分析將這批受試學生分成四群的結果。故，本研究採行依據區別分析所分類之結果，亦即各群人數依序分別為 223 人(第一群)、524 人(第二群)、225 人(第三群)、和 52 人(第四群)不等，其命名亦如同前述集群分析的結果。

此外，若從精熟程度的觀點來看，這批受試學生都是六年級學生，且考題包含三至六年級的課程範圍，因此，照理來說，教學過的課程學生應該都會，六年級的學生應該具有六年級的表现程度才對。但是，本研究發現只有 524 人(第二群，佔全體人數的 51.17%)的測量結果符合其被期望的程度，卻有 500 人(佔全體人數的 48.83%)的測量結果未達其被期望的標準，甚至有 52 人(第四群，佔全體人數的 5.08%)的程度只達三年級而已。由此可見，國內(至少是台北市)小學生的數學科學習成就未達期望標準的情形相當嚴重，需要進行補救教學的人數相當多。

表 7 區別分析結果

預測歸屬組別□

實

際

組

別□1□2□3□4□合計□□1□158

(72.5%)□36

(16.5%)□24

(11.0%)□0

(.0%)□218□□2□34

(6.6%)□479

(92.8%)□3

(.6%)□0

(.0%)□516□□3□30

(12.9%) □9  
 (3.9%) □188  
 (80.7%) □6  
 (2.6%) □233□□4□1  
 (1.8%) □0  
 (.0%) □10  
 (17.5%) □46  
 (80.7%) □57□□合計□223□524□225□52□1024  
 (85.06%) □註：刮號內的數字為百分比值，總正確分類百分比值為 85.06%。

接著，再根據每一群學生的二元化原始作答資料，求出該群的平均數向量（亦即該群學生在每一試題上的平均答對題數），再根據前節所述資料轉換的過程，轉換成對角線矩陣，再乘以試題概念矩陣，再求出概念與概念間的配對係數矩陣，輸入 KNOT 電腦程式分析，以計算並呈現這四群學生的路徑蒐尋網路圖解，這些知識結構圖會因為每群學生作答組型資料的不同，而呈現相異的構圖情形，如圖 6 至圖 9 所示。



圖 6 第一群學生的知識結構圖

圖 7 第二群學生的知識結構圖

圖 8 第三群學生的知識結構圖

圖 9 第四群學生的知識結構圖

如同圖 5 所示一樣，圖 6 至圖 9 之知識結構圖中的每一個節點，分別代表一個概念（其概念名稱可對照附錄二的試題概念說明），並且，圖 6 至圖 9 分別代表上述不同學力程度學生群在「數學科認知診斷成就測驗甲卷」上的作答組型資料所繪製而成的知識結構圖。在此知識結構圖中，圖 6 與圖 7 之圖形是完全一樣的，換言之，第一群學生與第二群學生的作答組型資料因為其概念與概念間配對係數值的相對排序關係是一致的緣故，所以根據路徑蒐尋量尺化算則所計算出概念與概念間的連結關係也是一致的，故，所繪製出的知識結構圖因此完全一樣。除此之外，圖 8 和圖 9 的形狀則與圖 6、圖 7 不同，但這四個圖形與圖 5 比較起來又有程度上的些微不同，這顯示利用知識結構圖的表徵方式，確實可以表徵（或區別）標準答案的參照結構與不同學力程度學生群之知識結構間的差異。

由不同學力程度學生群的知識結構圖中亦可發現，其個別的知識結構與標準答案的知識結構之間，還是有些不太相似的地方存在。若將所有不同學力程度學生群的知識結構圖與標準答案的知識結構圖作對映比較（mapping comparison）的話，則可發現這四群學生的知識結構圖中都有一個核心概念（即連結關係最多的概念）存在，而再由此核心概念發散連結出去，以連接路徑最短的相關概念。如圖 6、圖 7、與圖 8 分別為第一群、第二群、第三群學生的知識結構圖，其核心概念皆為 14；而圖 9 即為第四群學生之知識結構圖，亦有一個核心概念 13。由此可見，圖 9 明顯與前三群及標準答案的知識結構圖不同，但是，不同到什麼程度，則無法光由視覺目測來加以斷定的，我們還是需要根據客觀的數量指標來協助判斷才行。

### 三、不同學力程度學生群的相似性指數之比較

為了更具體呈現並比較說明不同學力程度學生群的知識結構圖之差異，茲以標準答案為參照結構，分別計算其餘四群學生的知識結構圖在 GTD 指數、PFC 或 C 指數、及 PRX 指數上的差異情形，並將結果於表 8 呈現。

表 8 四群學生與標準答案間的知識結構圖相似性指數之比較

□ 人數（人） □ 組距 / 中位數（分） □ PRX □ PFC □ GTD □ 第一群

□223□20-33/28□0.980□0.426□0.812□□第二群 □524□26-40/34□0.993□0.426□0.812□□  
第 三 群 □225□21-25/23□0.964□0.316□0.475□□ 第 四 群  
□526□6-23/17□0.011□0.134□0.137□□

由表 8 所示可知，第二群學生是最高分組學生，亦即其數學程度最佳者，在此，可說此群學生的數學程度最符合六年級學生所應具備的程度，也符合假設認為最佳表現學生的知識結構圖與標準答案的知識結構圖最為相似。由表中三種指數可得知，大致而言，不論是根據何種指數（PRX、PFC、或 GTD）來判斷，都是呈現第二群 > 第一群 > 第三群 > 第四群的結果，這項結果亦符合期望所認為者：亦即是六年級程度 > 五年級程度 > 四年級程度 > 三年級程度。

但是，在 PFC 和 GTD 指數上，第一群和第二群的指數是一樣的，這是由於第一群和第二群內部概念間配合係數矩陣值的排序關係是一致的緣故所致。其實，第一群學生的作答表現已與標準答案十分接近，由表 8 中的三種指數值亦可推論得知，第一群學生之學習程度也已相當接近標準答案，亦可視為準精熟程度的學生；因此，據以推論，我們若以數學科認知診斷成就測驗甲卷作為篩選學生是否具有名實相符的學力程度的話，最寬鬆的標準也至少需要達到第一群學生所具有的數學科成就程度才行，預估只有 72.95% 的學生符合期望，但不幸的，我們也將近有 27.05%（即第三群和第四群人數和佔全體學生的百分比）即將畢業的小學生是不具有小學六年級數學程度的，這問題不僅彰顯出目前小學數學教育的缺失，更彰顯出謀求妥善的補救教學是十分急迫且重要的事。

#### 四、認知診斷評量的可行性

由上述的結果分析與討論可知，一份成就測驗一旦被編製完成，即已固定好要測量到什麼樣的知識結構；亦即，該測驗中每道試題所欲測量的概念是什麼即已確定（命題者應該明確知道），而連結所有試題組成一份試卷，該試卷所欲測量的概念與概念間的結構關係（即知識結構）是什麼便跟著確定。若再根據受試者的原始作答資料，經過上述資料轉換過程，便可利用 KNOT 程式計算出每位受試者在該試卷上所測得的概念間連結關係，並以知識結構圖方式來表徵出所得的概念間連結關係。因此，我們可以這麼說，受試者在一份成就測驗上所測得的知識結構為何，其實可以用這套評量程序來彰顯出來，而可以不必使用傳統總分方式來呈現；若再進一步比較個別受試者與標準答案間知識結構的差異，則我們將可快速找出學生錯誤的概念連結關係（即概念與概念間的連結關係不正確）、缺陷的連結關係（即概念與概念間該有的連結關係卻沒有存在）、與多餘的連結關係（即概念與概念間原本不該有的連結關係卻存在）等學習落差所在，便可對症下藥直接採行適當的補救教學措施，以適時挽救可能即將造成的學習成就低落於一旦。

由於這套評量方式具有診斷受試者認知結構的差異、適時針對缺陷提供補救措施

之參考訊息的功能、和作為傳統紙筆測驗外的另類評量選擇的價值，因此，我們可以正式稱它為「認知診斷評量」(cognitively diagnostic assessment)。雖然，有關此方面的研究報告還有待加強，但它的應用潛力與價值正與日遽增，期待未來將有如雨後春筍般數量的研究報告持續發表，以凸顯認知診斷評量的應用價值。

#### 肆、結論與涵義

傳統實施的紙筆測驗教學評量中，多半僅著重在總結性的評量，只以一個總分來表徵學生的學習情形，而很少注意學生在學習過程中的表現情形，甚至更少去瞭解學生在學習過程中的知識表徵模式。

本研究旨在透過路徑蒐尋網路分析 (Pathfinder network analysis)，利用知識網路組織工具 (KNOT) 程式，企圖繪製出路徑蒐尋網路圖，以表徵出不同學力群學生的知識結構情形，並以客觀的量化指數 (GTD、PFC、和 PRX) 來顯示結構圖間的差異，以幫助教師和學生掌握學習狀況和瞭解學習障礙所在。

歸納上述結果的分析與討論，本研究可獲致下列幾點結論和涵義：

##### 1. 數學科認知診斷成就測驗甲卷可作為篩選不同學力程度學生的工具之用

本研究發現，依據上述研究程序所編製出的數學科綜合測驗，經過試題分析，被證實是一份具有良好信、效度的成就測驗工具，它不僅可以作為篩選或區別不同學力程度的學生之用，更可以作為一份認知診斷測驗之用，以繪製並診斷出每位受試學生在該測驗上得分的知識結構情形，並進而提供教師針對個別學生的學習障礙或錯誤概念進行直接有效的補救教學之依據。

##### 2. 國小學生的數學程度普遍未達應有的學力水準

就整體測驗分數而言，國小六年級學生的數學程度僅 51.17% 的人真正達到六年級的學力程度，若放鬆嚴格要求標準，頂多也只有 72.95% 的學生符合期望；反之，至少有 27.05% 的學生表現未達期望的標準，他們僅達三、四年級的數學程度而已。這種數學學習成就普遍低落的現象，值得學校、教師、與學生三方面共同省思，並且謀求改進之道。

##### 3. 不同學力程度學生的知識結構不盡相同

本研究發現，本研究用工具不僅能夠表徵出學生的知識結構，更能夠區別出不同學力程度的學生。此外，不僅這些不同學力程度學生的測驗平均得分有所差異，連其知識結構也都不盡相同，其間的差異不僅可由知識結構圖反映出來，就連同客觀的相似性指數 (GTD、PFC、和 PRX) 也都反映出此事實。

#### 4.學力程度愈高學生的知識結構愈接近所期望的學習結果

本研究發現，由不同的相似性指數可以看出，學力程度愈高的學生群（即真正符合六年級程度的學生），其知識結構愈趨近於標準答案（或教師教學）所期望達成的知識結構；反之，學力程度愈低的學生群（如只達三、四年級程度的六年級學生），則其知識結構與所期望者相去甚遠。

#### 5.認知診斷評量可作為一種新式的教學評量方法

本研究發現，利用路徑蒐尋網路量尺化算則所繪製出的知識結構圖，可以供作分析、診斷學生的錯誤概念之用，進而能夠針對學習缺陷之處提出適當的補救措施，所以它不僅可以改進傳統紙筆評量方法的不足，更可以進一步提供更具教育參考價值的診斷資訊。因此說，它不僅是一種新式的教學評量方法，更是一種教學評量的革新。

#### 6.認知診斷評量隱含對補救教學的發展契機

本研究所企圖應用的新式評量分法：「路徑蒐尋網路量尺化算則」分析法，對於找出學生錯誤的概念連結關係（即概念與概念間的連結關係不正確）、缺陷的連結關係（即概念與概念間該有的連結關係卻沒有存在）、與多餘的連結關係（即概念與概念間原本不該有的連結關係卻存在）等作答現象，可說是對症下藥；只要將學生的知識結構圖拿來與標準答案的知識結構圖做比對，即可找出概念轉變的落差所在，以便教師針對落差所在直接進行適當的補救教學。這項成果發現，不僅是一項教學評量的革新，更隱含教師重視補救教學的重要契機，讓學習低成就者能夠獲得即時的補救，以免錯過學習的關鍵期而造成永久無法補償的遺憾。

#### 7.認知診斷評量啟發網路表徵方法學的應用潛力

未來，應用這種認知診斷評量方法來探索各種學科領域知識結構的研究，將如雨後春筍般的蓬勃發展，一方面是發揮這種方法的應用潛力，另一方面則是開啟應用網路表徵方式的方法學研究大門，凡是可產生或收集到對稱性矩陣資料的各種統計方法和研究專題，都可以改用這種認知診斷評量方法來分析資料間的網路結構，以圖形表徵方式來呈現潛藏的網路結構關係，增加研究結果的說服性。

## 五、參考書目

古明峰（民 87）。數學應用題的解題認知歷程之探討。*教育研究資訊*，6 卷（3 期），63-77 頁。

江淑卿（民 86）。知識結構的重要特性之分析暨促進知識結構教學策略之實驗研究。國立台灣師範大學教育與輔導研究所博士論文。

江淑卿、郭生玉（民 86）。不同學習過程的概念構圖策略對促進知識結構專家化與理解能力之效果研究。*師大學報：教育類*，42 期，1-16 頁。

余民寧(民 86a)。有意義的學習---概念構圖之研究。台北：商鼎。

余民寧(民 86b)。教育測驗與評量---成就測驗與教學評量。台北：心理。

余民寧、陳嘉成（民 85a）。不同學習類型學生的概念結構之評量研究。台北：行政院國科會科資中心。國立政治大學教育學系執行（編號 NSC-85-2413-H-004-007）。

余民寧、陳嘉成（民 85b）。概念構圖：另一種評量法。*政大學報*，73 期（上冊），161-200 頁。

余民寧、陳嘉成（民 87）。排序理論在概念結構評量上的應用。*國立政治大學學報*，76 期，17-48 頁。

余民寧、陳嘉成、潘雅芳（民 85）。概念構圖法在測驗教學上的應用。*測驗年刊*，43 輯，195-212 頁。

余民寧、潘雅芳、林偉文，（民 85）。概念構圖法：合作學習抑個別學習。*教育與心理研究*，19 期，93-124 頁。

吳德邦、吳順治（民 78）。解題導向的數學教學策略。台北：五南。

李盛祖（民 86）。國小數學乘法系列診斷測驗題庫的建立與應用研究。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所碩士論文。

宋德忠、林世華、陳淑芬、張國恩（民 87）。知識結構的測量：徑路搜尋法與概念構圖法的比較。*教育心理學報*，30 卷（2 期），123-142 頁。

周台傑（民 81）。學習障礙者之評量。載於周台傑主編，*特殊兒童診斷手冊*（1-28 頁）。彰化：彰化師範大學特殊教育中心。

周台傑、蔡宗玫（民 86）。國小數學學習障礙學生應用問題解題之研究。*特殊教育學報*，12 期，233-292 頁。

岳修平譯（民 87）。*教學心理學-學習的認知基礎*。台北：遠流。

林世元（民 86）。合作學習在國小數學低成就學生補救教學實施成效之研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文。

林秀錦（民 83）。學習障礙的鑑定與批判。*國民教育*，34 卷（11、12 期），40-42 頁。

林清山譯（民 86）。*教育心理學-認知取向*。台北：遠流出版社。

林曉芳（民 88）。數學低成就國中生在代數概念發展之評量研究。國立政治大學教育學系碩士論文。

邱守榕（民 81）。關於數學學習研究。*科學發展月刊*，20 卷（5 期），571-584 頁。

洪榮照（民 79）。自我教導訓練對減輕國小學生數學焦慮的輔導效果。彰化師範大學輔導教育研究所碩士論文。

秦麗花（民 84）。國小數學學習障礙兒童數學解題補救教學實施成效之比較研究。*國立台南師範學院---「國民教育研究集刊」*，1 期，255-265 頁。

張春興（民 85）。*教育心理學-三化取向的理論與實際*。台北：東華。

- 陳嘉成(民 85)。以概念構圖為學習策略之教學對小學生自然科學習之成效研究。國立政治大學教育研究所碩士論文。
- 陳嘉成、余民寧(民 87)。以概念構圖為學習策略之教學對自然科學習的促進效果之研究。《政大學報》，77期，201-235 頁。
- 曾玉玲(民 82)。台北市高智商低成就國中學生學習信念與相關因素之探討。國立政治大學教育研究所碩士論文。
- 馮莉雅(民 86)。從認知取向探討數學教學原則與學習策略。《教育資料文摘》，1月號，118-138 頁。
- 楊坤堂(民 84)。學習障礙兒童。台北：五南。
- 蔡佳燕(民 89)。國小學生數學學科知識結構評量之研究。國立政治大學教育學系碩士論文。
- 劉弘白(民 79)。學習能力的障礙。台北：財團法人台北市劉氏社會福利事業基金會。
- 謝豐瑞(民 84)。數學教育指標研究：國中代數技能與解題能力的學習進展指標。台北：行政院國科會科資中心，國立台灣師範大學數學系執行。NSC83-0111-S003-053-A。
- 顏啟麟、羅昭強(民 84)。國中數學概念的學習進展指標。台北：行政院國科會科資中心。國立台灣師範大學數學系執行。NSC83-0111-S003-051A。
- Acton, W. H., Johnson, P. J., & Goldsmith, T. E. (1994). Structural knowledge assessment: Comparison of referent structures. *Journal of Educational Psychology*, 86, 303-311.
- Davis, R., Shorbe, H., & Szolovits, P. (1993). What is knowledge representation? *AI Magazine, Spring*, 17 - 33.
- Dearholt, D. W., & Schvaneveldt, R. W., (1990). Properties of Pathfinder networks: In R. W. Schvaneveldt (ED.), *Pathfinder associative networks: Studies in knowledge organization*. Norwood, NJ: Alex.
- Goldsmith, T. E., Johnson, P. J., & Acton, H. W. (1991). Assessing structural knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 83, 88-96.
- Goldsmith, T. E., Johnson, P. J., & Acton, H. W. (1994). Structural knowledge assessment: Comparison of referent structures. *Journal of Educational Psychology*, 86, 303-311.
- Goldsmith, T. E., & Davenport, D. M. (1990). Assessing structural similarity of graphs. In R. W. Schvaneveldt (Ed.), *Pathfinder associative networks : Studies in knowledge organization*. Norwood, NJ: Ablex.
- Gomez, R. L., & Housner, L. D. (1992). *Pedagogical knowledge structures in prospective teachers*. Paper presented at the Annual Meeting of the Southwest Psychological Association. (ERIC Reproduction Document Service No. ED 351-307).
- Gonzalvo, P., Canas, J. J., & Bajo, M. T. (1994). Structural representations in



knowledge acquisition. *Journal of Educational Psychology*, *86*, 601-616.

Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*, 18-32.

Johnson, P. J., Goldsmith, T. E., & Teague, K. W. (1994). Locus of the predictive advantage in pathfinder-based representations of classroom knowledge. *Journal of Educational Psychology*, *86*, 617 - 626.

Jonassen, D. H., Beissner, K., & Yacci, M.(1993). *Structural knowledge: Techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics : An exploratory study (Doctoral dissertation. Stanford University, 1967). *Dissertation Abstracts*, *28(11)*, 4380A.

Kintsch, W., & Greeno, J. (1985). Understanding the relative difficulty of verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics*, *4*, 306-323.

Kirk, S. A., Gallagher, J. J., & Anastasiow, N. T. (1993). *Educating exceptional children* (7th ed.). Boston : Houghton Mifflin.

Knoebel, A., Dearholt, D., & Schvaneveldt, R. W. (1988). *Empty nexus graphs*. Paper presented at the American Mathematical Society meeting, Las Cruces, NM.

Mayer, R. E. (1987). *Educational psychology : A cognitive approach*. Boston, MA: Little Brown and Company.

Nichols, P. D. (1994). A framework for developing cognitively diagnostic assessment. *Review of Educational Research*, *64*, 575-603.

Nichols, P. D., Chipman, S. F., & Brennan, R. C. (1995). *Cognitively diagnostic assessment*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ : Princeton University Press.

Reid, D. K., Hresko, W. R., & Swanson, H. J.(1991). *A cognitive approach to learning disabilities* (2<sup>nd</sup> ed.). Austin, Texas:PRO-ED.

Schoenfeld, A. H.(1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic.

Schvaneveldt, R. W. (Ed.) (1990a). *Pathfinder associative networks : Studies in knowledge organization*. Norwood, NJ: Ablex.

Schvaneveldt, R. W. (1990b). Proximities, networks, and schemata. In R. W. Schvaneveldt(Ed.), *Pathfinder associative networks : Studies in knowledge organization*. Norwood, NJ: Ablex.

Schvaneveldt, R. W., Dearholt, D. W., & Durso, F.T. (1988). Graph theoretic foundations of Pathfinder networks. *Computers and Mathematics with Applications*, *15*, 337-345.

Schvaneveldt, R. W., Durso, F. T., Goldsmith, T. E., Breen, T. J., Cooke, N. M., Tucker, R. G., & Maio, J. C. (1985). Measuring the structure of expertise,.

*International Journal of Man-Machine Studies*, 23, 699 - 728.

Schvaneveldt, R. W. (1994). *Knowledge network organizing tool* (PCKNOT version: 4.2). Las Cruces, NM : Interlink.

Solso, R. L. (1998). *Cognitive psychology* (5th ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

# 附錄一

## 數學科認知診斷成就測驗甲卷

各位小朋友：

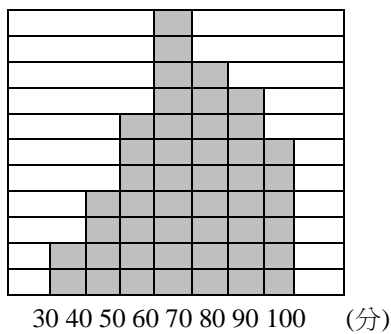
本測驗共有 40 題數學問題，旨在測量你的數學科綜合知識，每題只有一個正確答案或較佳的答案，作答時，請將你選擇的答案直接填入括弧中，謝謝你的合作！此外並請記得填上校名、姓名、班級、座號喔！

學校：\_\_\_\_\_國小 班級：六年\_\_班 姓名：\_\_\_\_\_座號：\_\_號

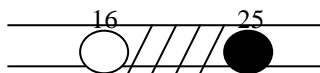
- ( ) 1. 一盒糖果有 10 顆，要買多少盒，才有 150 顆糖？  
1500 盒 150 盒 15 盒 10 盒
- ( ) 2. 有四盒香皂，一盒有 12 塊，現重新裝袋，平分成 6 袋，每袋有幾塊香皂？  
18 塊 10 塊 8 塊 2 塊
- ( ) 3. 「5 個 0.1」和下列哪一個一樣大？  
5 5/10 1/10 1/5
- ( ) 4. 一袋花片有 30 個，小明拿出其中的  $\frac{7}{30}$  袋，還剩下幾個花片？  
7 個 23 個  $\frac{7}{30}$  個  $\frac{23}{30}$  個
- ( ) 5. 哥哥有 685 元，弟弟的錢比哥哥多 150 元，兩人共有多少元？  
1220 元 685 元 985 元 1520 元
- ( ) 6. 一個蛋糕平分成 8 塊，姊姊吃了其中的 3 塊，共吃了多少個蛋糕？  
3 個 8 個  $\frac{1}{8}$  個  $\frac{3}{8}$  個
- ( ) 7. 「 $15 \times 8$ 」和「 $8 \times 15$ 」哪一個比較大？  
 $15 \times 8 > 8 \times 15$   $15 \times 8 < 8 \times 15$   $15 \times 8 = 8 \times 15$  不能比較
- ( ) 8. 「 $8 \times 9 = 72$ 」的式子中，前面的 8 叫做什麼？  
被乘數 乘數 積 和
- ( ) 9. 香蕉和蘋果合起來共重 950 公克，只知香蕉重 450 公克，問蘋果有多重？  
500 公克 950 公克 450 公克 1400 公克
- ( ) 10. 小明量報紙的長度，用 15 公分長的尺量了兩次，第三次量得剩下的長是 9 公分，報紙長多少公分？  
24 公分 30 公分 39 公分 48 公分
- ( ) 11. 整數的除法裡，如果除數不變，而被除數愈小，商就  
不變 愈大 愈小 不一定
- ( ) 12. 一億是一萬的多少倍？  
10 倍 100 倍 1000 倍 10000 倍
- ( ) 13. 「 $72 \div 6 \div 3$ 」不等於哪一個式子？

- $72 \div (6 \times 3)$      $72 \div (3 \times 6)$      $72 \div (6 \div 3)$      $72 \div 3 \div 6$
- ( ) 14. 在數字 "7.34" 中，有多少個 0.1 ?  
 4 個    3 個    2 個    1 個
- ( ) 15.  $\square \div 80 = 20 \dots\dots\dots 30$ ， $\square$  是  
  $20 \times 80 + 30$      $30 \times 20 + 80$      $30 \times 80 + 20$      $(20 + 30) \times 80$
- ( ) 16. 「 $4850 \div 50$ 」 =  
 97    98    99    100
- ( ) 17. 「 $21.75 \div 21$ 」計算到小數第二位時，餘數為  
 0.012    0.12    1.2    11.2
- ( ) 18. 鍛帶全長 5 公尺，姊姊用了  $\frac{3}{5}$  公尺，妹妹用了  $1\frac{4}{5}$  公尺，還剩下多少公尺？  
  $2\frac{2}{5}$  公尺     $1\frac{2}{5}$  公尺     $3\frac{2}{5}$  公尺     $\frac{2}{5}$  公尺
- ( ) 19. 「 $90 \div 3 \div 2$ 」 =  
  $90 \div (3 + 2)$      $90 \div (3 - 2)$      $90 \div (3 \times 2)$      $90 \times (3 \div 2)$
- ( ) 20. 「 $\frac{9}{20} + \frac{11}{20}$ 」等於  
  $\frac{19}{20}$      $\frac{18}{20}$      $\frac{15}{20}$     1
- ( ) 21. 下列各數中，哪一個既是 2 的倍數，又是 5 的倍數？  
 94580    26302    45675    36914
- ( ) 22. 下列哪一數不是  $\frac{12}{36}$  的等值分數？  
  $\frac{1}{3}$      $\frac{24}{72}$      $\frac{6}{18}$      $\frac{4}{9}$
- ( ) 23. 「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ 」等於  
  $\frac{7}{12}$      $\frac{1}{2}$     1     $1\frac{5}{7}$
- ( ) 24. 下圖中，未滿 60 分的有幾人？

(人)



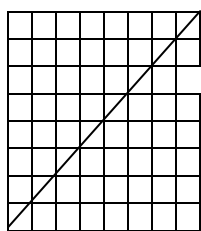
- 6    11    13    24
- ( ) 25. 右圖中，所包括的整數有幾個？



- 7    8    9    10
- ( ) 26. 「 $0.16 \times 1.806$ 」的積等於下列哪一式的積？  
  $0.16 \times 18.06$      $0.16 \times 1806$      $1.6 \times 0.1806$      $0.16 \times 180.6$

( )27.下圖中，10 公斤是多少元？

(元)



0 1 2 3 4 5 6 7 8 (公斤)

180 元 200 元 400 元 無法得知

( )28.小傑面對 960 公尺遠的山谷喊叫，6 秒後聽到回音，聲音傳播的秒速約多少？

640 公尺 320 公尺 160 公尺 80 公尺

( )29.小圓半徑是大圓半徑的一半，則大圓面積是小圓面積的幾倍？

2 4 6 8

( )30.容積 6 公升是 20 立方公分的

3000 倍 300 倍 30 倍 3 倍

( )31.下列算式中，積比被乘數小的是哪一個？

7/8 × 1 1/2 4 1/5 × 5/6 1 3/4 × 7/5 3/3 × 4/4

( )32.「4/5 ÷ 3 1/3」 = ？

6/25 5 2 2/3 以上答案都不對

( )33.想排成每邊 20 個石頭的正方形，需要多少個石頭？

40 個 38 個 36 個 32 個

( )34.「(1-3/7 × 1 5/9) ÷ 1/3 = ?」

1/3 2/3 1/9 1

( )35.「3 4/5 × 0.55 + 3 4/5 × 0.45」怎麼計算比較簡便？

3 4/5 × (0.55+0.45)  (3 4/5 × 0.55)+(3 4/5 × 0.45)

3 4/5 × (0.55× 0.45)  (3 4/5 × 0.45) + (3 4/5 × 0.55)

( )36.有甲、乙兩數，甲數是乙數的 2/3 (甲、乙都不是 0)，那麼乙數是甲數的幾倍？

1 2/3 倍 1 1/2 倍 1 1/3 倍 3/5 倍

( )37.一件物品依照成本加 25%出售是表示什麼？

加五成二分 加二成五分 加五分二釐 加二分五釐

( )38.長方體的長變為 5 倍，寬變為四倍，高變為一半，體積變為原來的多少倍？

5 倍 4 倍 10 倍 20 倍

( )39.西瓜一個吃去一半的 2/3，剩下多少？

1/2 1/3 2/3 1/5

( )40.甲繩的長是乙繩的 5 倍，那麼兩繩的差相當於甲繩的幾倍？

4 倍 5 倍 1/5 倍 4/5 倍

## 附錄二

### 數學科認知診斷成就測驗甲卷試題說明

由國小三、四、五、六年級數學科任課教師根據課程內容命題，本試卷共包含四十道試題，每個年級有十題，且分別由四位不同任課老師負責命題，並亦提出每道試題所欲測得之概念分析與說明。

針對國小三、四、五、六年級數學科課程之命題內容範圍，共整理歸納出 20 項概念。以下依序說明之：

- 第一題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作整數四則運算。
- 第二題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作整數四則運算。
- 第三題：欲瞭解學生是否明白分數與小數，且會作數的比較。
- 第四題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作整數、分數的四則運算。
- 第五題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作整數、分數的四則運算。
- 第六題：欲瞭解學生是否會作整數、分數的四則運算。
- 第七題：欲瞭解學生是否會作整數的四則運算，且會作數的比較。
- 第八題：欲瞭解學生是否會作整數的四則運算，且認識數學名詞。
- 第九題：欲瞭解學生是否明白如何解題，是否會作整數四則運算，且瞭解測量的概念。
- 第十題：欲瞭解學生是否明白如何解題，是否會作整數四則運算，且瞭解測量的概念與因數及倍數之間的關係。
- 第十一題：欲明白學生是否會作整數的四則運算。
- 第十二題：欲瞭解學生是否明白因數與倍數的意義、十進位數的意義，且會作整數的四則運算。
- 第十三題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作整數四則運算。
- 第十四題：欲明白學生是否會作整數與小數的四則運算。
- 第十五題：欲明白學生是否會作整數的四則運算。
- 第十六題：欲明白學生是否會作整數的四則運算。
- 第十七題：欲明白學生是否會作整數與小數的四則運算。
- 第十八題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作整數及分數四則運算。
- 第十九題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作整數四則運算。
- 第二十題：欲明白學生是否會作分數的四則運算。
- 第二十一題：欲瞭解學生是否明白因數與倍數的意義，且會作整數的四則運算。
- 第二十二題：欲明白學生是否會作分數的四則運算。
- 第二十三題：欲瞭解學生是否會作分數的四則運算，且明白概數的意義。
- 第二十四題：欲瞭解學生是否會作整數的四則運算，能解讀統計圖表，並明白概數的意義。
- 第二十五題：欲瞭解學生是否明白概數與十進位數的意義。

- 第二十六題：欲瞭解學生是否會作整數的四則運算，且瞭解十進位數的意義。
- 第二十七題：欲瞭解學生是否會作整數的四則運算，且能解讀統計圖表，並明瞭位置表示的意義。
- 第二十八題：欲瞭解學生是否明瞭速率的意義。
- 第二十九題：欲瞭解學生是否會作小數的四則運算，測量學生對圓與球定義、因數與倍數，以及面積概念之瞭解。
- 第三十題：欲測量學生對體積、容積與立體圖形概念，以及因數與倍數意義之瞭解。
- 第三十一題：欲瞭解學生是否會作分數四則運算。
- 第三十二題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作分數四則運算。
- 第三十三題：欲瞭解學生是否明白如何解題，是否會作整數四則運算，且明瞭多邊形的意義。
- 第三十四題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作分數四則運算。
- 第三十五題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作分、小數之四則運算。
- 第三十六題：欲瞭解學生是否明白如何解題，是否會作分數之四則運算與明瞭比的概念、以及因數與倍數概念的意義。
- 第三十七題：欲瞭解學生是否會作分數之四則運算與明瞭比的概念、以及因數與倍數概念的意義。
- 第三十八題：欲測量學生對體積、多邊形、立體圖形之意義、比的概念、以及因數與倍數概念的意義之明瞭程度。
- 第三十九題：欲瞭解學生是否明白如何解題，且是否會作分數四則運算。
- 第四十題：欲瞭解學生是否明白如何解題，是否會作整、分數四則運算，以及能理解比的概念。

## 試題概念說明

### **概念一：整數**

內容為：(1) 加、減法的合成分解 (2) 乘法運算 (3) 瞭解乘法交換律 (4) 等分除的意義 (5) 四則混合運算 (6) 數的分解合成 (7) 乘法運算與概念 (8) 瞭解除法的意義 (9) 成、除法的混合運算 (10) 會作除法運算 (11) 有餘數的除法 (12) 有括弧的運算 (13) 整數的加、減、乘、除 (14) 分配律

### **概念二：小數**

內容為：(1) 小數的合成分解 (2) 瞭解單位小數 (3) 小數數字的位值 (4) 小數的加、減、乘、除 (5) 兩數間的其他數 (6) 整數、小數與分數間的互化

### **概念三：分數**

內容為：(1) 分數的合成分解 (2) 分數的認識與計算 (3) 分數的化聚 (4) 比較分數大小 (5) 分數的加、減、乘、除 (6) 瞭解分數的意義 (7) 約分的意義 (8) 擴分的意義 (9) 最簡分數的意義 (10) 帶分數、假分數的互化 (11) 被乘

數、乘數與積的關係（12）通分的意義（13）母子和（14）母數的意義（15）母子差的求法

#### **概念四：圓與球**

內容為：（1）圓心角的意義（2）周角的意義（3）平角的意義（4）圓形的意義（5）圓周率的意義（6）圓周的算法

#### **概念五：多邊形**

內容為：（1）認識四邊形的構成要素（2）四邊形的意義（3）正方形的性質（4）長方形的性質（5）菱形的性質（6）多邊形的意義（7）平行四邊形的性質（8）梯形的辨別（9）正方形的邊長

#### **概念六：面積**

內容為：（1）長方形面積的運算（2）面積的認識與測量（3）面積運算（4）梯形面積的運算（5）平行四邊形面積的運算（6）三角形面積的運算（7）圓面積的運算（8）面積單位的表示（9）底面積的概念（10）角柱、圓柱的側面積（11）正方形面積的運算

#### **概念七：體積**

內容為：（1）體積的認識（2）體積大小（3）體積運算（4）瞭解體積的長寬高（5）體積單位的表示（6）正方體體積的求法（7）（正方體）邊長與體積變化關係（8）柱體體積求法（9）體積的意義

#### **概念八：統計圖表**

內容為：（1）圖表的畫法（2）折線圖的畫法（3）直方圖的辨識

#### **概念九：怎樣解題**

內容為：（1）分析簡化問題（2）瞭解並根據題意列式（3）無條件消去法（4）明白等式（5）明白代數式（6）未知數的意義（7）移項變號（8）代數應用問題（9）常數的意義

#### **概念十：比的概念**

內容為：（1）比的意義（2）化成簡單整數比（3）比的前後項變化關係（4）基準量、比較量（5）比值的關係（6）反比的意義（7）正比的意義

#### **概念十一：因數與倍數**

內容為：（1）明白倍數與乘法的關係（2）倍數的運算（3）因數的意義（4）公因數的意義（5）最大公因數的意義（6）倍數的意義（7）辨別5的倍數（8）辨別2的倍數（9）加成問題（10）被除數、除數與商的關係（11）個數與間隔數的關係

#### **概念十二：位置的表示**

內容為：（1）座標的辨認（2）數線的使用

#### **概念十三：概數**

內容為：（1）概數估算（2）概數的意義（3）四捨五入的方法（4）以上的意義（5）以下的意義（6）未滿的意義（7）超過的意義

#### **概念十四：速率**



內容為：(1) 速率的概念求法 (2) 速率的意義 (3) 時速、分數、秒數的意義 (4) 距離、時間、速率公式與計算

**概念十五：十進數**

內容為：(1) 瞭解十進位位名順序 (2) 十進位的結構

**概念十六：測量**

內容為：(1) 長度的測量 (2) 重量的測量 (3) 長度單位換算 (4) 重量單位的互化

**概念十七：容積**

內容為：(1) 容積的意義 (2) 容積單位的換算

**概念十八：立體圖形**

內容為：(1) 正方體的意義 (2) 角柱構成要素 (3) 立體圖形概念 (4) 角錐構成要素 (5) 圓柱的構成要素 (6) 正方體、面的位置關係

**概念十九：數的比較**

內容為：(1) 比較大小 (2) 數量的比較

**概念二十：數學名詞**

內容為：(1) 數學名詞

# 附錄三

## 試題概念分析表

概念 試題	1. 整數	2. 小數	3. 分數	4. 圓與球	5. 多邊形	6. 面積	7. 體積	8. 統計圖表	9. 怎樣解題	10. 比的概念	11. 因數與倍數	12. 位置的表示	13. 概數	14. 速率	15. 十進數	16. 測量	17. 容積	18. 立體圖形	19. 數的比較	20. 數學名詞
1.	1								1											
2.	1								1											
3.		1	1																1	
4.	1		1						1											
5.	1		1						1											
6.	1		1																	
7.	1																		1	
8.	1																			1
9.	1								1							1				
10.	1								1	1						1				
11.	1																		1	
12.	1									1					1					
13.	1								1											
14.	1	1																		
15.	1																			
16.	1																			
17.	1	1																		
18.	1		1						1											
19.	1								1											
20.			1																	
21.	1										1									
22.			1																	
23.			1																	
24.	1							1					1							
25.													1		1					
26.		1													1					
27.	1							1				1								
28.	1								1						1					
29.			1	1		1					1									
30.							1				1						1	1		
31.			1																1	
32.			1						1											
33.	1				1				1											
34.			1						1											
35.		1	1						1											
36.			1						1	1	1									
37.		1								1	1									
38.					1		1			1	1								1	
39.			1						1											
40.	1		1						1	1										

註：1 即表示該試題有測量到該概念，其餘則否。